# VRAI/FAUX
# 2020

## EXERCICE 1 :

*Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse. Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point. Une réponse fausse, incorrecte ou une absence de réponse n'enlève pas de point.*

**1. Affirmation :** « Le nombre 4 700 001 est un nombre premier. »

**2. Affirmation :** « Les nombres $32^{12}$ et $16^{15} + 3$ sont égaux. »

**3. Affirmation :** « La somme des carrés de deux nombres entiers naturels consécutifs est toujours un nombre impair. »

**4. Affirmation :** « Le triangle ABC avec AB = 6,4 m, BC = 4,8 m et AC = 8 m est rectangle en B. »

## EXERCICE 2 :

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

**Affirmation 1** : « Le nombre $\frac{27}{45}$ est un nombre décimal. »

**Affirmation 2** : « Si *a* et *b* sont deux nombres décimaux positifs non nuls, alors le résultat de la division de *a* par *b* est plus petit que *a*. »

**Affirmation 3** : « La somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3. »

**Affirmation 4** : « 42 possède exactement 7 diviseurs positifs. »

@maitresse_aux_lunettes

# CORRECTION

## EXERCICE 1 :

**1.** $4 + 7 + 1 = 12 = 4 \times 3$.
4 700 001 est **divisible par 3** et ne peut donc pas être premier.
**L'affirmation 1 est fausse.**

**2.** $32^{12}$ est un **nombre pair**.
$16^{15} + 3$ est la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair : il est **donc impair**.
Ces deux nombres ne peuvent donc être égaux.
**L'affirmation 2 est fausse.**

Remarque
*On pouvait aussi écrire :*
$32^{12} = (2 \times 16)^{12} = 2^{12} \times 16^{12} = (2^4)^3 \times 16^{12} = 16^3 \times 16^{12} = 16^{15}$ *et conclure.*

**3.**
• Résultats préliminaires :
- le carré d'un nombre pair est pair ;
- le carré d'un nombre impair est impair.

Deux entiers naturels consécutifs sont, l'un pair, l'autre impair. D'après les résultats préliminaires, la somme des carrés de deux nombres consécutifs est donc la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair ; **cette somme est impaire**.
**L'affirmation 3 est vraie.**

• *Autre méthode :*
Soit $n$ un nombre entier quelconque.
Alors, on peut traduire algébriquement l'expression : « la somme des carrés de deux nombres entiers consécutifs » par : $n^2 + (n + 1)^2$.
On a : $n^2 + (n + 1)^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 = 2n^2 + 2n + 1 = 2(n^2 + n) + 1 = 2N + 1$, où $N = n^2 + n$ est un nombre entier naturel.
$2N + 1$ est le **successeur d'un nombre pair**, il est **donc impair**.
**L'affirmation 3 est vraie.**

**4.** $AB^2 = 6{,}4^2 = 40{,}96$
$BC^2 = 4{,}8^2 = 23{,}04$
$40{,}96 + 23{,}04 = 64$
$AC^2 = 8^2 = 64$
Donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$.
D'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle ABC est rectangle en B.
**L'affirmation 4 est vraie.**

## EXERCICE 2 :

1. Affirmation 1 : « Le nombre $\frac{27}{45}$ est un nombre décimal. »

En tapant la division sur la calculatrice nous voyons que $\frac{27}{45} = 0{,}6$. Il s'agit donc bien d'un nombre décimal.

Nous avons plusieurs possibilité pour démontrer que l'affirmation est juste. Nous pouvons montrer que

— $\frac{27}{45}$ admet une écriture décimale ne comportant que de zéros à partir d'un certain rang

— dans la forme irréductible de $\frac{27}{45}$ son dénominateur n'a que 2 ou 5 comme facteurs premiers (et éventuellement 1 si le nombre donné avait été un entier).

— $\frac{27}{45}$ égale une fraction dont le dénominateur est un multiple de 10.

Je vais le faire de la première façon.

Démontrons que $\frac{27}{45}$ est un nombre décimal.

Procédons à la division posée en potence de 27 par 45

$$\begin{array}{r|l} 27 & 45 \\ -\;0 & 0{,}6 \\ \hline 270 & \\ -\;270 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc $\frac{27}{45}$ admet une écriture décimale n'admettant que des zéros à partir d'un certain rang autrement dit $\frac{27}{45}$ est un nombre décimal.

$\boxed{\text{L'affirmation 1 est vraie.}}$

2. Affirmation 2 : « Si $a$ et $b$ sont deux nombres décimaux positifs non nuls, alors le résultat de la division de $a$ par $b$ est plus petit que $a$. »

   Un résultat général qui semble difficile à démontrer. En testant quelques valeurs nous voyons que cela ne fonctionne pas.
   Pour démontrer qu'une règle générale (propriété universelle) est fausse il suffit de trouver un cas pour lequel çà ne fonctionne pas.

   Exhibons un contre-exemple.

   $a = 1$ et $b = 0{,}1$ sont des nombres décimaux et $\frac{a}{b} = \frac{1}{0{,}1} = 10$. Donc dans ce cas $a < \frac{a}{b}$.

   L'affirmation 2 est fausse.

3. Affirmation 3 : « La somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3. »

   Quelques essais semblent confirmer la proposition. Essayons de démontrer ce résultat général.

   Démontrons que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

   Le résultat doit être démontrer pour n'importe quelle série de trois entiers consécutifs. Nous choisissons donc un entier quelconque mais sans lui donnée une valeur particulière pour que notre raisonnement garde sa valeur générale.

   Soit $n \in \mathbb{Z}$.
   Alors $n$, $n+1$ et $n+2$ sont trois entiers consécutifs.
   Nous avons

$$\begin{aligned} n + (n+1) + (n+2) &= n + n + 1 + n + 2 \\ &= 3n + 3 \\ &= 3n + 3\times 1 \\ &= 3(n+1) \end{aligned}$$

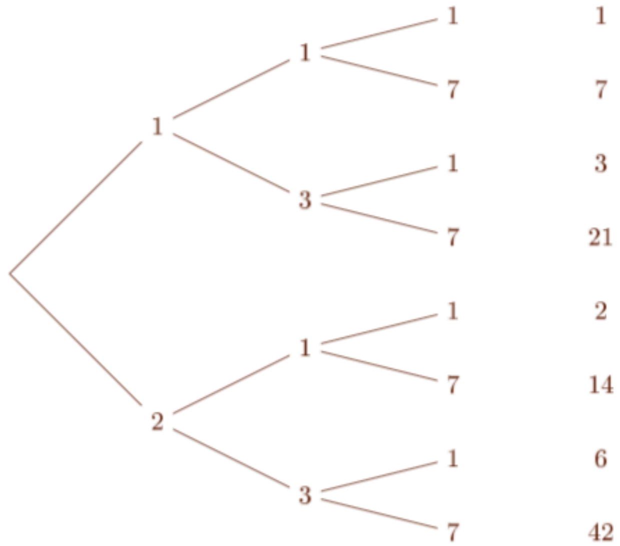
   Donc la somme des trois entiers consécutifs est bien un multiple de trois. De plus ce résultat est bien général puisqu'il est vrai quelque soit la valeur choisie pour $n$.

   L'affirmation 3 est vraie.

4. Affirmation 4 : « 42 possède exactement 7 diviseurs positifs. »

   Déterminons tous les diviseurs (positifs) de 42.

   Remarquons tout d'abord que la décomposition de 42 en facteurs premiers est : $42 = 2 \times 3 \times 7$.
   Présentons le diviseurs sous forme d'arbre :




Nous voyons que 42 possède exactement 8 diviseurs positifs.

$$\boxed{\text{L'affirmation 4 est fausse.}}$$